RICHARD DEDEKIND,

профессоръ Математики Высшей технической школы въ Брауншвейгѣ.

Stetigkeit
Ununterbrochenheit

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

u.

и

irrationale Zahlen

ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.

Vom Deutschen übersetzt

Съ нѣмецкаго языка перевелъ

С. Шатуновскій.

S. Schatunowski

Sonderabdruck aus d. populär-wiss. Zeitschrift „Wegweiser der Versuch

Отдѣльный оттискъ изъ популярно-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“.

u. der Elementar-Mathematik

Кат. изд. № 106.

Odessa

ОДЕССА.

„Центральная Типографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

1894.

131

RICHARD DEDEKIND,

профессоръ Математики Высшей технической школы въ Брауншвейгѣ.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ
и
ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.

Съ нѣмецкаго языка перевелъ

С. Шатуновскій.

Отдѣльный оттискъ изъ популярно-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики".

ЭЖС

Кат. изд. № 106.

ОДЕССА.

„Центральная Типографія", уг. Авчиникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

1894.

Дозволено цензурою. Одесса, 11-го Іюля 1894 года.

Содержанiе.

Отъ переводчика.

На числа мы прежде всего должны смотрѣть, какъ на рядъ произвольно выбранныхъ знаковъ,...

H. von Helmholz („Zählen u. messen“, 21).

Во всякомъ случаѣ, число (numerus, ἀριθμός) есть произвольно созданный нами знакъ, который служитъ средствомъ достиженія весьма многообразныхъ цѣлей.

E. Schroeder. („Lehrbuch d. Arith. u. Alg.,“ 2).

Если точно слѣдить за тѣмъ, что мы дѣлаемъ при счетѣ количества (Menge oder Anzahl) вещей, то придемъ къ разсмотрѣнію способности духа относить вещи къ вещамъ, ставить одну вещь въ соотвѣтствіе съ другой, или изображать одну вещь въ другой,...

R. Dedekind. („Was sind u. was sollen die Zahlen?“ VIII).

Приступая къ переводу этого небольшого сочиненія на русскій языкъ, мы, съ одной стороны, руководствовались назрѣвшею у насъ, какъ намъ кажется, потребностью отдать себѣ ясный отчетъ въ тѣхъ началахъ, которыя лежатъ въ основѣ ариѳметики вообще и ариѳметики ирраціональныхъ въ частности; съ другой стороны, намъ казалось, что въ маленькой брошюрѣ Дедекинда яркая образность и высокая отвлеченность соединены въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо для того, чтобы уяснить читателю ходъ возникновенія современной вполнѣ отвлеченной идеи объ ирраціональномъ числѣ и возможность примѣненія этой идеи къ предметамъ болѣе или менѣе конкретнаго характера — къ геометрическимъ образамъ. Нашъ переводъ кажется намъ тѣмъ болѣе умѣстнымъ, что въ послѣднее время появились въ переводѣ на русскій языкъ работы Гельмгольца и Кронеккера, посвященныя научному обоснованію теоріи раціональныхъ чиселъ. Знакомство съ этой теоріей существенно необходимо и для пониманія Дедекинда. Особенно важенъ тотъ фактъ, что полная теорія раціональныхъ чиселъ можетъ быть построена только на опредѣленіи чиселъ какъ *знаковъ*, *символовъ*, которые расположены въ установленной разъ навсегда послѣдовательности и которыми могутъ отмѣчаться нѣкоторыя соотношенія между вещами. Сами по себѣ эти знаки могутъ быть какой угодно природы—это могутъ быть звуки, цвѣта, тѣла, понятія и т. д., распредѣленные въ нѣкоторомъ неизмѣнномъ порядкѣ. Важность установленія такой неизмѣнной въ своемъ порядкѣ группы знаковъ заключается въ „способности нашего духа", какъ говоритъ Дедекиндъ, устанавливать соотвѣтствіе между этими знаками и индивидуумами какой бы то ни было группы вещей, благодаря чему мы вносимъ опредѣленный порядокъ и въ эту послѣднюю группу.

Когда при ближайшемъ разсмотрѣніи вещей въ нихъ усматриваются такія свойства или соотношенія, которыя не могутъ характеризоваться установленными знаками-числами, то создаютъ, если это выгодно, новые знаки такого рода, чтобы ими могли характеризоваться вновь усмотрѣнныя соотношенія вещей. Можно, если угодно, называть числами и эти новые знаки; можно ихъ такъ и не называть. Выгоднѣе однако бываетъ распространить терминъ „число" и на вновь вводимые символы. Такимъ образомъ къ ряду символовъ, названныхъ цѣлыми числами, были прежде всего присоединены новые символы, также названные числами, именно дробными числами. Это оказалось необходимымъ потому, что цѣлыми числами нельзя или, по крайней мѣрѣ, весьма неудобно характеризовать такія явленія, которыя сопровождаются распаденіемъ предмета на части. Когда при нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ оказывается удобнѣе считать предметы, расположенные въ линейномъ порядкѣ, не отъ крайняго (крайняго можетъ и не быть), а отъ какого либо средняго предмета, въ обѣ стороны отъ него, то является выгоднымъ присоединить къ прежнимъ символамъ новые символы—отрицательныя числа.

Мы не будемъ больше говорить объ этомъ. Укажемъ только, что поводъ ко введенію новыхъ символовъ можетъ заключаться не въ объективныхъ свойствахъ вещей, къ которымъ мы обыкновенно эти символы относимъ, а въ стремленіи подчинить старые символы нѣкоторымъ новымъ требованіямъ, несовмѣстимымъ съ тѣми свойствами символовъ, которыя служили имъ опредѣленіемъ. Такъ, напр., когда мы располагаемъ только тѣмъ рядомъ знаковъ, который мы называемъ системой раціональныхъ чиселъ, и ищемъ число x (конечно раціональное, ибо другихъ чиселъ мы не установили), котораго квадратъ равенъ данному положительному числу a, то оказывается, что для нѣкоторыхъ a этотъ x существуетъ; для другихъ-же его вовсе нѣтъ, т. е. бываетъ такъ, что среди символовъ—раціональныхъ чиселъ—нѣтъ такого, квадратъ котораго равенъ a. Мы можемъ въ этомъ случаѣ ввести въ наши изслѣдованія новый символъ, квадратъ котораго равенъ a, можемъ называть и этотъ символъ числомъ—положимъ радикальнымъ числомъ, можемъ его обозначить черезъ $a^{\frac{1}{2}}, \sqrt{a}$ или какъ нибудь иначе. Можемъ всего этого и не дѣлать. Во второмъ случаѣ установимъ такую теорему: нѣкоторыя положительныя числа имѣютъ, другія не имѣютъ квадратныхъ корней; въ первомъ случаѣ теорема будетъ такая: всѣ положительныя числа имѣютъ квадратные корни. Обѣ теоремы вѣрны, ибо въ послѣдней подразумѣвается, что тѣ положительныя числа, которыя не имѣютъ корней среди старыхъ символовъ, имѣютъ корни среди новыхъ.

У самого Дедекинда опредѣленіе числа, какъ символа, нигдѣ явно не высказывается, но такое опредѣленіе числа явно вытекаетъ изъ разсужденій, изложенныхъ въ другомъ его сочиненіи: „Was sind und was sollen die Zahlen?“ По нашему мнѣнію, существенно важно знать, что ирраціональныя числа (также какъ и всякія другія) суть чистые знаки, которые могутъ быть и дѣйствительно бываютъ весьма полезны потому только, что этими знаками удобно выражаются реальныя свойства вещей.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

и

иррацiональныя числа.

Предисловiе автора.

Разсужденiя, составляющiя предметъ этого маленькаго сочиненiя, относятся къ осени 1858 года. Тогда я, въ качествѣ профессора Союзнаго политехникума въ Цюрихѣ, въ первый разъ по своему положенiю обязанъ былъ излагать элементы дифференцiальнаго исчисленiя и при этомъ чувствовалъ живѣе, чѣмъ когда либо, недостатокъ въ дѣйствительно научномъ обоснованiи ариѳметики. При изложенiи понятiя о приближенiи перемѣнной величины къ постоянному предѣлу и именно при доказательствѣ того положенiя, что величина, которая возрастаетъ постоянно, но не сверхъ всякихъ границъ, должна приближаться къ нѣкоторому предѣлу, я прибѣгалъ къ геометрическимъ очевидностямъ. Да и теперь я изъ дидактическихъ основанiй считаю такое привлеченiе геометрической наглядности при первомъ обученiи дифференцiальному исчисленiю необычайно полезнымъ, даже неизбѣжнымъ, если не хотятъ потратить слишкомъ много времени. Но никто не станетъ отрицать того, что этотъ способъ введенiя въ изученiе дифференцiальнаго исчисленiя не можетъ имѣть никакого притязанiя на научность.

Во мнѣ тогда это чувство неудовлетворенности преобладало въ такой степени, что я принялъ твердое рѣшенiе думать до тѣхъ поръ, пока ни найду чисто ариѳметическаго и вполнѣ строгаго основанiя для началъ анализа безконечныхъ. Говорятъ часто, что дифференцiальное исчисленiе занимается непрерывными величинами, однако же нигдѣ не даютъ опредѣленiя этой непрерывности и даже при самомъ строгомъ изложенiи дифференцiальнаго исчисленiя доказательство основываютъ не на непрерывности, а аппеллируютъ болѣе или менѣе сознательно либо къ геометрическимъ представленiямъ, либо къ представленiямъ, которыя берутъ свое начало въ геометрiи, или наконецъ доказательство основываютъ на положенiяхъ, которыя сами никогда не были доказаны чисто ариѳметическимъ путемъ. Сюда относится, напримѣръ, и вышеупомянутое положенiе; болѣе же точное изысканiе убѣдило меня въ томъ, что это или всякое другое эквивалентное ему предложенiе можетъ до извѣстной степени быть разсматриваемо, какъ достаточный фундаментъ для анализа безконечныхъ. Все сводится только къ тому, чтобы открыть настоящее начало этого положенiя въ элементахъ ариѳметики и вмѣстѣ съ этимъ прiобрѣсти дѣйствительное опредѣленiе существа непрерывности. Это удалось мнѣ 24 Ноября 1858 года, и, нѣсколько дней спустя, я сообщилъ результаты своихъ размышленiй моему дорогому другу Durège'у, что повело къ продолжительной и оживленной бесѣдѣ. Впослѣдствiи я излагалъ эти мысли о научномъ обосновании ариѳметики то одному, то другому изъ моихъ учениковъ, читалъ также объ этомъ предметѣ докладъ въ ученомъ обществѣ профессоровъ здѣсь, въ Брауншвейгѣ, но я не могъ окончательно рѣшиться на дѣйствительное опубликованiе, потому, во-первыхъ, что изложенiе представляется не легкимъ, и потому еще, что и самый предметъ такъ мало плодовитъ. Между тѣмъ какъ я наполовину сталъ уже подумывать о томъ, чтобы избрать эту тему предметомъ настоящаго юбилейнаго сочиненiя*), ко мнѣ въ руки нѣсколько дней назадъ, 14 марта, попала, благодаря любезности ея автора, статья E. Heine (Crelle's Journal, Bd. 74) и подкрѣпила меня въ моемъ рѣшенiи. По существу я вполнѣ согласенъ съ содержанiемъ этого сочиненiя, но долженъ откровенно сознаться, что мое изложенiе кажется мнѣ болѣе простымъ по формѣ и болѣе точно выдвигающимъ настоящее ядро вопроса. Въ то время, какъ я писалъ это предисловiе (20 марта 1872), я получилъ интересную статью „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" G. Cantor'a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. 5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Какъ мнѣ кажется при быстромъ чтенiи, аксiома въ § 2 вполнѣ согласуется, независимо отъ внѣшней формы ея изложенiя, съ тѣмъ, что я отмѣчаю ниже въ § 3, какъ сущность непрерывности. Какую же пользу представитъ выдѣленiе, хотя бы только въ понятiи, дѣйствительныхъ чиселъ еще болѣе высокаго порядка, я прямо еще не въ состоянiи признать сообразно моему пониманiю системы дѣйствительныхъ чиселъ, совершенной въ самой себѣ.

---

*) Авторъ выпустилъ это сочиненiе къ юбилею своего отца.

(*Примѣч. переводчика*).

§ 1.

Свойства раціональныхъ чиселъ.

Хотя ариѳметика раціональныхъ чиселъ предполагается здѣсь уже извѣстной, но мнѣ думается, что полезно будетъ выдвинуть нѣкоторые главные моменты, не подвергая ихъ обсужденію, а съ тою только цѣлью, чтобы заранѣе намѣтить точку зрѣнія, на которую я становлюсь въ послѣдующемъ изложеніи. Я смотрю на всю ариѳметику, какъ на необходимое или, по крайней мѣрѣ, натуральное слѣдствіе простѣйшаго ариѳметическаго акта, счета; самый же счетъ представляетъ собою не что иное, какъ послѣдовательное созиданіе безконечнаго ряда положительныхъ цѣлыхъ чиселъ, гдѣ каждый индивидуумъ опредѣляется непосредственно ему предшествующимъ. Простѣйшій актъ заключается въ переходѣ отъ созданнаго уже индивидуума къ слѣдующему, вновь созидаемому. Уже сама по себѣ цѣпь этихъ чиселъ образуетъ необычайно полезное вспомогательное средство для человѣческаго ума и представляетъ неизсякаемое богатство замѣчательныхъ законовъ, къ которымъ мы приходимъ посредствомъ введенія четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Сложеніе есть соединеніе въ одинъ актъ упомянутыхъ простѣйшихъ актовъ, повторенныхъ сколько угодно разъ. Такимъ же образомъ изъ сложенія проистекаетъ умноженіе. Между тѣмъ какъ обѣ эти операціи всегда выполнимы, выполнимость обратныхъ операцій, вычитанія и дѣленія, оказывается ограниченной. Каковъ бы ни былъ здѣсь ближайшій поводъ, какія бы сравненія и аналогіи съ опытомъ и наблюденіемъ ни приводили къ этому— мы этотъ вопросъ оставимъ въ сторонѣ; достаточно того, что именно эта ограниченность въ выполненіи обратныхъ операцій всякій разъ становилась настоящей причиной новаго творческаго акта. Такъ созданы человѣческимъ умомъ отрицательныя и дробныя числа, благодаря чему пріобрѣтено было орудіе безконечно болѣе высокаго совершенства въ видѣ системы всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Эта система, которую я обозначу черезъ R, обладаетъ прежде всего тою полнотою и законченностью, которую я въ другомъ мѣстѣ *) отмѣтилъ, какъ признакъ *числового корпуса*

*) „Vorlesungen ueber Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet". Zweite Auflage. § 159.

(Zahlkörper), и которая состоитъ въ томъ, что четыре основныя операціи со всякими двумя индивидуумами изъ R всегда выполнимы, то есть, что результатомъ этихъ операцій всегда опять является опредѣленный индивидуумъ изъ R, если только исключить единственный случай дѣленія на нуль.

Для нашей ближайшей цѣли гораздо болѣе важнымъ представляется другое свойство системы R, которое можетъ быть выражено тѣмъ, что система R представляетъ правильно распредѣленную, безконечно простирающуюся въ двѣ стороны область одного измѣренія. Что̀ этимъ хотятъ сказать—достаточно указывается выборомъ выраженій, заимствованныхъ изъ геометрическихъ представленій; поэтому тѣмъ болѣе необходимо выдѣлить соотвѣтствующія имъ чисто ариѳметическія особенности, чтобы не могло быть и виду, будто ариѳметика нуждается въ такихъ чуждыхъ ей представленіяхъ.

Если нужно выразить, что знаки a и b означаютъ одно и то же раціональное число, то полагаютъ одинаково $a=b$, какъ и $b=a$. Различіе двухъ раціональныхъ чиселъ сказывается въ томъ, что разность $a-b$ имѣетъ или положительное, или отрицательное значеніе. Въ первомъ случаѣ *a больше b, b меньше a*, что и указывается знаками $a>b$, $b<a$ *). Такъ какъ во второмъ случаѣ $b-a$ имѣетъ положительное значеніе, то $b>a$, $a<b$. Сообразно съ этой двойственностью въ характерѣ различія двухъ чиселъ a и b, имѣютъ мѣсто слѣдующіе законы:

I. Если $a>b$, $b>c$, то $a>c$. Всякій разъ, когда a, c будутъ два различныхъ (или неравныхъ) числа и когда b будетъ больше одного и меньше другого, мы, не опасаясь отголоска геометрическихъ представленій, будемъ это выражать такъ: b лежитъ между обоими числами a, c.

II. Если a, c два различныхъ числа, то всегда существуетъ безконечное множество чиселъ, лежащихъ между a, c.

III. Если a есть опредѣленное число, то всѣ числа системы R распадаются на два класса A_1 и A_2, изъ коихъ каждый содержитъ безконечно много индивидуумовъ. Первый классъ A_1 обнимаетъ собою всѣ тѣ числа a_1, которыя меньше a; второй классъ A_2 обнимаетъ всѣ числа a_2, которыя больше a. Само число a можетъ быть отнесено по произволу къ первому или ко второму классу, и тогда оно соотвѣтственно бываетъ наибольшимъ числомъ въ первомъ классѣ или наименьшимъ числомъ во второмъ. Въ каждомъ случаѣ разложеніе системы R на два класса A_1, A_2 таково, что каждое число перваго класса A_1 меньше каждаго числа второго класса A_2.

---

*) Въ послѣдующемъ подразумѣвается такъ называемое „алгебраическое“ больше и меньше, если только не прибавлено слово „абсолютно“.

§ 2.

Сравненіе раціональныхъ чиселъ съ точками прямой линіи.

Поставленныя нами на видъ свойства раціональныхъ чиселъ напоминаютъ о взаимномъ относительномъ положеніи точекъ прямой линіи L. Если различать два принадлежащія ей противоположныя направленія словами „вправо" и „влѣво" и если p, q—двѣ различныя точки, то либо точка p расположена вправо отъ q, и въ то же время q—влѣво отъ p, или, наоборотъ, q—вправо отъ p и въ то же время p—влѣво отъ q. Третій случай невозможенъ, если p и q дѣйствительно различныя точки. Сообразно съ этимъ различіемъ въ положеніи имѣютъ мѣсто слѣдующіе законы.

I. Если p лежитъ вправо отъ q и q опять вправо отъ r, то и p лежитъ вправо отъ r; говорятъ тогда, что q лежитъ между точками p и r.

II. Если p, r двѣ различныя точки, то существуетъ безконечное множество точекъ, лежащихъ между p и r.

III. Если p есть опредѣленная точка на L, то всѣ точки на L распадаются на два класса P_1, P_2, изъ коихъ каждый содержитъ безконечное множество индивидуумовъ. Первый классъ P_1 обнимаетъ собою всѣ тѣ точки p_1, которыя лежатъ влѣво отъ p, а второй классъ P_2 обнимаетъ всѣ точки, которыя лежатъ вправо отъ p. Сама точка p можетъ быть отнесена по произволу къ первому или ко второму классу. Въ каждомъ случаѣ разложеніе прямой L на два класса или куска таково, что каждая точка перваго класса P_1 лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса P_2.

Эта аналогія между раціональными числами и точками прямой становится, какъ извѣстно, дѣйствительною зависимостью, когда на прямой выбираютъ опредѣленную начальную или нулевую точку o и опредѣленную единицу длины для измѣренія отрѣзковъ. При помощи послѣдней можно для каждаго раціональнаго числа a построить соотвѣтствующую длину, и если нанести ее на прямую отъ точки o вправо или влѣво, смотря по тому, есть ли a положительное или отрицательное число, то получимъ опредѣленную конечную точку p, которая можетъ быть обозначена какъ точка, соотвѣтствующая числу a. Раціональному числу нуль соотвѣтствуетъ точка o. Такимъ образомъ каждому раціональному числу a, т. е. каждому индивидууму въ R, соотвѣтствуетъ одна и только одна точка p, т. е. индивидуумъ на L. Если двумъ числамъ a, b отвѣчаютъ двѣ точки p, q и если $a > b$, то p лежитъ вправо отъ q. Законамъ I, II, III предыдущаго параграфа вполнѣ отвѣчаютъ законы I, II, III настоящаго.

§ 3.

Непрерывность прямой линіи.

Но теперь фактомъ величайшей важности является то обстоятельство, что на прямой L есть безконечно много точекъ, которыя не соотвѣтствуютъ никакому раціональному числу. Дѣйствительно, если точка p соотвѣтствуетъ раціональному числу a, то, какъ извѣстно, длина op соизмѣрима съ употребленной при построеніи единицей длины, т. е. существуетъ третья длина, такъ называемая общая мѣра, относительно которой обѣ длины представляютъ цѣлыя кратныя. Но уже древніе греки знали и доказали, что существуютъ длины, несоизмѣримыя съ данной единицей длины, напр., діагональ квадрата, сторона котораго есть единица длины. Если нанести такую длину отъ точки o на прямую, то получимъ конечную точку, которой не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число. Такъ какъ легко далѣе показать, что существуетъ безконечное множество длинъ, несоизмѣримыхъ съ единицей длины, то можемъ утверждать: прямая L безконечно болѣе богата индивидуумами-точками, чѣмъ область R раціональныхъ чиселъ индивидуумами-числами.

Если же хотятъ, а это въ самомъ дѣлѣ желательно, изслѣдовать всѣ явленія на прямой также и ариѳметическимъ путемъ, то, въ виду недостаточности для этой цѣли раціональныхъ чиселъ, становится необходимымъ существенно улучшить построенный путемъ созиданія раціональныхъ чиселъ инструментъ R, создавъ новыя числа такимъ образомъ, чтобы область чиселъ пріобрѣла ту же полноту, или, скажемъ прямо, ту же *непрерывность*, какъ и прямая линія.

Приведенныя до сихъ поръ соображенія всѣмъ такъ хорошо извѣстны, что многіе сочтутъ ихъ повтореніе совершенно излишнимъ. Однако же я нахожу ихъ краткое обозрѣніе необходимымъ для того, чтобы надлежащимъ образомъ подготовить главный вопросъ. Принятое до сихъ поръ введеніе ирраціональныхъ чиселъ связывается именно съ понятіемъ о протяженныхъ величинахъ — которое само нигдѣ до сихъ поръ не опредѣлено — и опредѣляетъ число, какъ результатъ измѣренія такой величины другою того же рода*). Вмѣсто этого я требую, чтобы ариѳметика развивалась сама изъ себя. Можно въ общемъ согласиться съ тѣмъ, что такія связи съ неариѳметическими представленіями дали ближайшій поводъ къ расширенію понятія о числѣ (хотя это рѣшительно не имѣло мѣста при введеніи комплексныхъ чиселъ); но это без-

---

*) Кажущееся преимущество общности такого опредѣленія числа исчезаетъ тотчасъ же, какъ только подумаешь о комплексныхъ числахъ. Наоборотъ, по моему воззрѣнію, понятіе отношенія двухъ однородныхъ величинъ тогда только можетъ быть ясно развито, когда ирраціональныя числа уже введены.

условно не можетъ служить достаточнымъ основаніемъ для того, чтобы ввести въ ариѳметику, науку о числахъ, эти чуждыя ей соображенія. Какъ отрицательныя и дробныя раціональныя числа созданы путемъ свободнаго творчества и какъ вычисленія съ этими числами должны были и могли быть сведены къ законамъ вычисленій съ положительными цѣлыми числами, точно такъ же должно стремиться къ тому, чтобы ирраціональныя числа были вполнѣ опредѣлены черезъ посредство раціональныхъ чиселъ. Но какъ это сдѣлать? — вотъ въ чемъ вопросъ.

Предыдущее сравненіе области R раціональныхъ чиселъ съ прямою привело къ открытію въ первой изъяновъ (Lückenhaftigkeit), неполноты или разрывности, между тѣмъ какъ прямой мы приписываемъ полноту, отсутствіе пробѣловъ, или непрерывность. Въ чемъ же собственно состоитъ эта непрерывность? Все и заключается въ отвѣтѣ на этотъ вопросъ, и только въ этомъ отвѣтѣ мы пріобрѣтемъ научное основаніе для изслѣдованія *всѣхъ* непрерывныхъ областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малѣйшихъ частицъ конечно ничего не достигнешь. Дѣло идетъ о томъ, чтобы дать точный признакъ непрерывности, который могъ бы служить базисомъ дѣйствительныхъ дедукцій. Долгое время я напрасно объ этомъ думалъ, но наконецъ нашелъ искомое. Разныя лица вѣроятно оцѣнятъ эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдетъ ея содержаніе весьма тривіальнымъ. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: въ предыдущихъ параграфахъ обращено было вниманіе на то, что каждая точка *p* прямой производитъ разложеніе прямой на двѣ части такимъ образомъ, что каждая точка одной части расположена влѣво отъ каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности въ обратномъ принципѣ, т. е. въ слѣдующемъ:

„Если всѣ точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса, то существуетъ одна и только одна точка, которая производитъ это раздѣленіе прямой на два класса, это разсѣченіе прямой на два куска“*).

*) Т. е., если, слѣдуя какому бы то ни было закону (признаку), напр., подчиняясь условіямъ нѣкоторой задачи, мы производимъ раздѣленіе точекъ прямой на два класса такимъ образомъ, что 1. каждая точка прямой принадлежитъ либо къ тому, либо къ другому классу, и 2. каждая точка одного класса расположена влѣво отъ каждой точки другого класса, то существуетъ одна и только одна точка такого свойства, что каждая точка, влѣво отъ нея лежащая, принадлежитъ къ одному классу, а всѣ остальныя точки прямой принадлежатъ къ другому классу. Если бы мы разорвали прямую, т. е. удалили бы изъ нея отрѣзокъ AB, то оставшійся геометрическій образъ („разорванная“ прямая) былъ бы разбитъ на два куска P и Q, лежащіе съ различныхъ сторонъ изъяна такимъ образомъ, что 1) каждая точка разсматриваемаго образа принадлежала бы либо къ классу P, либо къ классу Q и 2) если кусокъ P, содержащій точку A, лежитъ влѣво отъ изъяна, то каждая точка класса P лежитъ влѣво отъ каждой точки класса Q. Такимъ образомъ каждая точка, лежащая влѣво отъ точки A, принадлежитъ къ классу P, а всѣ остальныя точки — къ классу Q. Точка B обладаетъ тѣмъ же свой-

Какъ уже и сказано было, я, кажется, не ошибаюсь, принявъ, что каждый тотчасъ же согласится съ истинностью этого утвержденія; большинство моихъ читателей будутъ даже очень разочарованы, узнавъ, что посредствомъ этой тривіальности долженъ быть снятъ покровъ съ тайны непрерывности. Относительно этого я замѣчу слѣдующее: мнѣ очень пріятно, если каждый находитъ упомянутый принципъ столь яснымъ и въ такой мѣрѣ согласнымъ со своимъ представленіемъ о прямой линіи; ибо я рѣшительно не въ состояніи привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не въ состояніи этого сдѣлать. Принятіе этого свойства прямой линіи есть не что иное, какъ аксіома, посредствомъ которой мы только и признаемъ за линіей ея непрерывность, мысленно вкладываемъ (hineindenken) непрерывность въ прямую. Если вообще пространство имѣетъ реальное бытіе, то ему *нѣтъ* необходимости быть непрерывнымъ. Безчисленныя его свойства оставались бы тѣми же, если бы оно было разрывнымъ. И если бы мы знали навѣрно, что пространство не обладаетъ непрерывностью, то, при желаніи, намъ все таки ничто не могло бы помѣшать сдѣлать его непрерывнымъ черезъ мысленное заполненіе его пробѣловъ. Это заполненіе должно было бы состоять въ созданіи новыхъ точекъ и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу.

§ 4.

Созиданіе ирраціональныхъ чиселъ.

Послѣдними словами уже достаточно ясно указывается, какимъ образомъ разрывная область R раціональныхъ чиселъ должна быть дополнена до превращенія ея въ непрерывную. Какъ это поставлено было на видъ въ § 1 (III), каждое раціональное число a производитъ разложеніе системы R на два класса A_1 и A_2 такого рода, что каждое число a_1 перваго класса меньше каждаго числа a_2 втораго класса A_2; число a представляетъ либо наибольшее число класса A_1, либо наименьшее число класса A_2. Если теперь дано какое либо подраздѣленіе системы R на два класса A_1, A_2, обладающее только тѣмъ характернымъ свойствомъ, что каждое число a_1 въ A_1 меньше каждаго числа a_2 въ A_2, то для краткости мы будемъ называть такое подраздѣленіе *сѣченіемъ* и будемъ его означать черезъ (A_1, A_2). Мы можемъ тогда сказать, что

ствомъ: всѣ точки нашего образа, лежащія влѣво отъ B, принадлежитъ къ классу P; остальныя точки—къ классу Q. Существованіемъ не одной, а двухъ точекъ такого свойства какъ A и B характеризуется разрывность нашего образа. Невозможностью существованія двухъ такихъ точекъ и постояннымъ существованіемъ одной только точки такого рода опредѣляется непрерывность прямой.

(*Примѣч. переводчика*).

каждое число a производитъ одно или собственно два сѣченія, на которыя мы однако не будемъ смотрѣть какъ на существенно различныя*); это сѣченіе имѣетъ *кромѣ того* то свойство, что либо между числами перваго класса есть наибольшее, либо между числами втораго класса существуетъ наименьшее. И наоборотъ, если сѣченіе обладаетъ и этимъ свойствомъ, то оно производится этимъ наибольшимъ или наименьшимъ числомъ.

Легко однако убѣдиться въ томъ, что существуетъ безчисленное множество сѣченій, которыя не могутъ быть произведены раціональнымъ числомъ. Ближайшій примѣръ есть слѣдующій.

Пусть D будетъ положительное цѣлое число, но не квадратъ цѣлаго числа. Существуетъ положительное цѣлое число λ такого рода, что

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Если возьмемъ для второго класса A_2 каждое положительное раціональное число, котораго квадратъ $> D$, а для перваго класса A_1 всѣ остальныя раціональныя числа, то это подраздѣленіе составитъ сѣченіе (A_1, A_2), то есть каждое число a_1 будетъ меньше каждаго числа a_2. Именно, если $a_1 = 0$ или отрицательно, то уже въ силу этого a_1 меньше каждаго числа a_2, ибо по опредѣленію это послѣднее представляетъ собой положительное число. Если же a_1 есть число положительное, то его квадратъ $\leqq D$ и, слѣдовательно, a_1 меньше каждаго числа a_2, котораго квадратъ $> D$.

Это сѣченіе не производится однако никакимъ раціональнымъ числомъ. Чтобы доказать это, должно прежде всего обнаружить, что нѣтъ никакого раціональнаго числа, котораго квадратъ равенъ D. Хотя это и извѣстно изъ первыхъ элементовъ теоріи чиселъ, но мы все же находимъ возможнымъ удѣлить мѣсто слѣдующему косвенному доказательству. Если есть раціональное число, котораго квадратъ $= D$, то существуютъ и два положительныхъ цѣлыхъ числа t и u, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$t^2 - D u^2 = 0,$$

и можно принять, что u есть *наименьшее* положительное цѣлое число, обладающее тѣмъ свойствомъ, что его квадратъ черезъ умноженіе на D обращается въ квадратъ нѣкотораго цѣлаго числа t. Такъ какъ очевидно

*) Число a можетъ быть отнесено къ первому или ко второму классу. То и другое подраздѣленіе R на два класса разсматривается какъ два случая одного и того же сѣченія. Въ первомъ случаѣ, когда число a отнесено къ первому классу, оно есть наибольшее число въ первомъ классѣ, и нельзя указать наименьшаго числа во второмъ классѣ; во второмъ случаѣ нѣтъ наибольшаго числа въ первомъ классѣ, но a есть наименьшее число во второмъ классѣ.

(*Примѣч. переводчика*).

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u,$$

то число

$$u_1 = t - \lambda u$$

есть положительное цѣлое число и притомъ меньшее u. Если далѣе положить

$$t_1 = \mathrm{D}u - \lambda t,$$

то и t_1 будетъ положительное цѣлое число, причемъ получаемъ

$$t_1^2 - \mathrm{D}u_1^2 = (\lambda^2 - \mathrm{D})(t^2 - \mathrm{D}u^2) = 0,$$

что противорѣчитъ допущенію, сдѣланному относительно u.

Такимъ образомъ квадратъ всякаго цѣлаго числа a или $< \mathrm{D}$, или $> \mathrm{D}$. Отсюда легко выводится, что въ классѣ A_1 нѣтъ наибольшаго, а въ классѣ A_2 нѣтъ наименьшаго числа. Дѣйствительно, если положить

$$y = \frac{x(x^2 + 3\mathrm{D})}{3x^2 + \mathrm{D}},$$

то

$$y - x = \frac{2x(\mathrm{D} - x^2)}{3x^2 + \mathrm{D}}$$

и

$$y^2 - \mathrm{D} = \frac{(x^2 - \mathrm{D})^3}{(3x^2 + \mathrm{D})^2}.$$

Если взять здѣсь для x положительное число изъ класса A_1, то $x^2 < \mathrm{D}$, слѣдовательно, $y > x$ и $y^2 < \mathrm{D}$, поэтому y также принадлежитъ къ классу A_1. Если же положить x числомъ изъ класса A_2, то $y < x$; $x > 0$ и $y^2 > \mathrm{D}$, такъ что и y принадлежитъ къ классу A_2. Это сѣченіе не производится поэтому никакимъ раціональнымъ числомъ.

Въ томъ свойствѣ, что не всѣ сѣченія производятся раціональными числами, и состоитъ неполнота или разрывность области R раціональныхъ чиселъ.

Теперь всякій разъ, когда передъ нами сѣченіе (A_1, A_2), которое не можетъ быть произведено никакимъ раціональнымъ числомъ, мы *создаемъ* новое *ирраціональное* число α, которое разсматривается нами, какъ вполнѣ опредѣленное этимъ сѣченіемъ (A_1, A_2). Мы скажемъ, что число α соотвѣтствуетъ этому сѣченію, или что оно производитъ это сѣченіе. Такимъ образомъ отнынѣ каждому опредѣленному сѣченію соотвѣтствуетъ одно и только одно раціональное или ирраціональное число, и мы будемъ смотрѣть на два числа какъ на *различныя*, или *неравныя* тогда и только тогда, когда они соотвѣтствуютъ существенно различнымъ сѣченіямъ.

Чтобы найти основаніе для распредѣленія всѣхъ *реальныхъ*, т. е. всѣхъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, намъ необходимо прежде всего изслѣдовать соотношенія между двумя какими либо сѣченіями (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимыми какими угодно двумя числами α и β. Всякое сѣченіе (A_1, A_2) очевидно дано вполнѣ уже въ томъ случаѣ, когда мы знаемъ одинъ изъ двухъ классовъ, наприм. первый классъ A_1, потому что второй A_2 состоитъ изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, не заключающихся въ классѣ A_1; характерною же особенностью этого перваго класса является то, что, заключая въ себѣ какое либо число a_1, онъ содержитъ и всѣ числа, меньшія a_1. Если теперь сравнимъ два первыхъ класса этого рода A_1 и B_1, то можетъ случиться 1), что они вполнѣ тождественны, т. е. каждое число, содержащееся въ A_1, содержится также и въ B_1 и каждое число, содержащееся въ B_1, содержится и въ A_1. Въ этомъ случаѣ A_2 необходимо тождественно съ B_2; оба сѣченія вполнѣ тождественны, что мы знаками выражаемъ черезъ $\alpha=\beta$ или $\beta=\alpha$.

Но если два класса A_1 и B_1 не тождественны, то въ одномъ, напр. въ A_1, есть число $a'_1=b'_2$, не содержащееся въ классѣ B_1 и заключающееся, слѣдовательно, въ B_2; поэтому всѣ числа b_1, заключающіяся въ B_1, несомнѣнно будутъ меньше, чѣмъ это число $a'_1=b'_2$; слѣдовательно, всѣ числа b_1 заключаются и въ A_1.

Если теперь 2) это число a'_1 будетъ единственное число въ A_1, не входящее въ B_1, то всякое другое число a_1, содержащееся въ A_1, будетъ содержаться и въ B_1, а потому a_1 меньше a'_1, т. е. a'_1 есть наибольшее между числами a_1, поэтому сѣченіе (A_1, A_2) производится раціональнымъ числомъ $\alpha=a'_1=b'_2$. О второмъ сѣченіи (B_1, B_2) мы уже знаемъ, что всѣ числа b_1 класса B_1 содержатся и въ A_1, а потому они меньше, чѣмъ число $a'_1=b'_2$, которое содержится въ B_2; всякое же другое число b_2, содержащееся въ B_2, должно быть больше, чѣмъ b'_2, потому что иначе b_2 было бы также меньше, чѣмъ a'_1 и заключалось бы въ A_1, а слѣдовательно и въ B_1. Такимъ образомъ b'_2 есть наименьшее между числами, содержащимися въ B_2; слѣдовательно, и сѣченіе (B_1, B_2) производится тѣмъ же раціональнымъ числомъ $\beta=b'_2=a'_1=\alpha$. Оба сѣченія поэтому несущественно различны.

Но если 3) въ A_1 есть по крайней мѣрѣ два различныхъ раціональныхъ числа $a'_1=b'_2$ и $a''_1=b''_2$, не содержащихся въ B_1, то ихъ существуетъ и безконечное множество, потому что все безконечное множество чиселъ, лежащихъ между a'_1 и a''_1 (§ 1, II), содержится очевидно въ A_1, но не въ B_1. Два числа α и β, соотвѣтствующія въ этомъ случаѣ существенно различнымъ сѣченіямъ (A_1, A_2) и (B_1, B_2), мы также называемъ *различными*, а именно скажемъ, что α *больше*, чѣмъ β, что β *меньше*, чѣмъ α, и выразимъ это въ знакахъ какъ черезъ $\alpha>\beta$, такъ и черезъ $\beta<\alpha$. Здѣсь слѣдуетъ поставить на видъ, что это опредѣленіе вполнѣ совпадаетъ съ прежнимъ, когда оба числа α и β раціональны.

Остаются еще слѣдующіе возможные случаи: если 4) въ B_1 содержится одно и только одно число $b'_1 = a'_2$, не содержащееся въ A_1, то оба сѣченія (A_1, A_2) и (B_1, B_2) только несущественно различны и производятся однимъ и тѣмъ же числомъ $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$. Если же 5) въ B_1 есть по крайней мѣрѣ два различныхъ числа, не содержащихся въ A_1, то $\beta > \alpha, \alpha < \beta$.

Такъ какъ этимъ исчерпываюся всѣ случаи, то выводимъ, что изъ двухъ различныхъ чиселъ одно необходимо большее, другое меньшее; въ этомъ заключаются два возможныхъ случая. Третій случай невозможенъ. Это заключалось уже въ употребленіи *сравнительной степени* (больше, меньше) для выраженія отношенія между α и β; но только теперь выборъ такого выраженія вполнѣ оправданъ. Именно при изысканіяхъ такого рода необходимо самымъ заботливымъ образомъ остерегаться, чтобы, даже при всемъ желаніи быть честнымъ, не увлечься и не сдѣлать непозволительныхъ перенесеній изъ одной области въ другую, изъ за поспѣшнаго выбора выраженій, относящихся къ другимъ, уже развитымъ представленіямъ.

Если снова точно обсудимъ случай $\alpha > \beta$, то найдемъ, что меньшее число β въ томъ случаѣ, когда оно раціонально, навѣрное принадлежитъ къ классу A_1. Дѣйствительно, такъ какъ въ A_1 есть число $a'_1 = b'_2$, принадлежащее классу B_2, то, независимо отъ того, будетъ ли β наибольшимъ числомъ въ B_1 или наименьшимъ въ B_2, навѣрное имѣемъ $\beta \leqq a'_1$, и, слѣдовательно, β содержится въ A_1. Точно также изъ $\alpha > \beta$ выводится, что большее число α, когда оно раціонально, навѣрное содержится въ B_2, ибо $\alpha \geqq a'_1$. Соединяя оба соображенія, найдемъ слѣдующій результатъ: если сѣченіе (A_1, A_2) производится числомъ α, то всякое раціональное число принадлежитъ къ классу A_1 или классу A_2, смотря по тому, будетъ ли оно меньше или больше α. Если само число α раціональное, то оно можетъ принадлежать къ тому или къ другому классу.

Отсюда, наконецъ, вытекаетъ еще и слѣдующее: если $\alpha > \beta$; если, значитъ, существуетъ безчисленное множество чиселъ въ A_1, не содержащихся въ B_1, то существуетъ среди нихъ также безконечное множество такихъ чиселъ, которыя одновременно отличны и отъ α и отъ β. Каждое такое раціональное число $c < \alpha$, ибо оно содержится въ A_1, и въ то же время оно $> \beta$, потому что содержится въ B_2.

§ 5.

Непрерывность области реальныхъ чиселъ.

Сообразно съ твердо установленными нами родами различія чиселъ, система $\mathfrak{R}$ всѣхъ реальныхъ чиселъ образуетъ правильно распредѣленную область одного измѣренія. Этимъ сказано только то, что нижеслѣдующіе законы имѣютъ мѣсто.

I. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то и $\alpha > \gamma$. Мы будемъ говорить, что β лежитъ между числами α и γ.

II. Если α, γ два различныхъ числа, то всегда существуетъ безконечное множество различныхъ чиселъ, лежащихъ между числами α и γ.

III. Если α есть опредѣленное число, то всѣ числа системы $\mathfrak{R}$ распадаются на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, изъ коихъ каждый содержитъ безконечно много индивидуумовъ. Первый классъ $\mathfrak{A}_1$ обнимаетъ собою всѣ тѣ числа α_1, которыя $<\alpha$; второй классъ $\mathfrak{A}_2$, обнимаетъ всѣ тѣ числа α_2, которыя $>\alpha$. Само число α можетъ быть отнесено по произволу къ первому или ко второму классу и тогда оно соотвѣтственно бываетъ наибольшимъ числомъ въ первомъ или наименьшимъ во второмъ классѣ. Въ каждомъ случаѣ разложеніе системы $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ таково, что каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса $\mathfrak{A}_2$, и мы говоримъ, что это разложеніе произведено числомъ α.

Чтобы быть краткимъ и не утомлять читателя, я опускаю доказательства этихъ положеній, вытекающія непосредственно изъ опредѣленій предыдущихъ параграфовъ.

Кромѣ этихъ свойствъ, область $\mathfrak{R}$ обладаетъ еще *непрерывностью*, т. е. имѣетъ мѣсто слѣдующее положеніе:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всѣхъ реальныхъ чиселъ распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число α_1 класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа α_2 класса $\mathfrak{A}_2$, то существуетъ одно и только одно число α, посредствомъ котораго это разложеніе производится.

Доказательство. Вмѣстѣ съ разложеніемъ или сѣченіемъ $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и нѣкоторое сѣченіе (A_1, A_2) системы R всѣхъ раціональныхъ чиселъ, опредѣленое тѣмъ правиломъ, что A_1 содержитъ всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_1$, а A_2—всѣ остальныя раціональныя числа, т. е. всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_2$. Пусть α будетъ то вполнѣ опредѣленное число, которое производитъ это сѣченіе (A_1, A_2). Если теперь β есть какое либо число, отличное отъ α, то существуетъ безконечно много раціональныхъ чиселъ c, которыя лежатъ между α и β. Если $\beta<\alpha$, то $c<\alpha$; поэтому c принадлежитъ къ классу A_1, а, слѣдовательно, и къ кассу $\mathfrak{A}_1$, но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta<c$, то и β принадлежитъ къ тому же классу $\mathfrak{A}_1$, ибо каждое число въ $\mathfrak{A}_2$ больше каждаго числа c въ $\mathfrak{A}_1$. Если же $\beta>\alpha$, то $c>\alpha$; поэтому c принадлежитъ къ классу A_2, а, слѣдовательно, и къ классу $\mathfrak{A}_2$, но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta>c$, то и β принадлежитъ къ классу $\mathfrak{A}_2$, потому что каждое число въ $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа c въ $\mathfrak{A}_2$. Такимъ образомъ каждое число β, отличное отъ α, принадлежитъ или къ классу $\mathfrak{A}_1$, или къ классу $\mathfrak{A}_2$, смотря по тому, будетъ ли $\beta<\alpha$, или $\beta>\alpha$; слѣдовательно, само α представляетъ либо наибольшее число въ $\mathfrak{A}_1$, либо наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$, т. е. α есть нѣкоторое, и, очевидно, единственное число, посредствомъ котораго производится разложеніе $\mathfrak{R}$ на классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Что требовалось доказать.

§ 6.

Вычисленія съ реальными числами.

Для того, чтобы вычисленіе съ двумя реальными числами α и β свести къ вычисленію съ раціональными числами, нужно только по двумъ сѣченіямъ (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимымъ числами α и β въ системѣ R, опредѣлить сѣченіе (C_1, C_2), соотвѣтствующее результату γ вычисленія*). Мы ограничимся здѣсь приведеніемъ простѣйшаго примѣра, сложенія.

Если c есть какое либо раціональное число, то мы отнесемъ его къ классу C_1, если существуетъ число a_1 въ A_1 и число b_1 въ β, такого рода, что $a+b\geq c$. Всѣ другія числа c отнесемъ къ классу C_2. Это подраздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса C_1 и C_2

---

*) Авторъ очевидно хотѣлъ сказать слѣдующее: дѣйствія (+), (—), (×) и (:) опредѣлены были до сихъ поръ только для раціональныхъ чиселъ; для ирраціональныхъ же чиселъ эти дѣйствія не будутъ имѣть смысла до тѣхъ поръ, пока мы не условимся относительно того, какой именно смыслъ мы *желаемъ* имъ придавать въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ. Такъ, напримѣръ, сумму двухъ ирраціональныхъ чиселъ нельзя опредѣлить ни какъ совокупность, въ которой содержится столько единицъ и аликвотныхъ частей единицы, сколько ихъ въ двухъ слагаемыхъ, вмѣстѣ взятыхъ, ни индуктивно, какъ это дѣлаетъ Грассманъ для цѣлыхъ чиселъ, ибо ни то, ни другое опредѣленіе не имѣетъ здѣсь смысла. Мы могли бы и совсѣмъ не употреблять термина „сумма“ въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ, говоря, что ирраціональныя числа не имѣютъ суммы, но дѣлать такое или подобное ограниченіе было бы въ высшей степени неудобно; съ другой стороны, сообразуясь съ выгодами соблюденія въ одной и той же области знанія такъ называемаго правила перманентности въ опредѣленіи термина (по этому правилу всякое измѣненіе въ соозначеніи термина должно совершаться такъ, чтобы новое соозначеніе по возможности не только не противорѣчило прежнему, но заключало бы послѣднее какъ частный случай), будетъ наиболѣе цѣлесообразнымъ опредѣлить термины основныхъ дѣйствій надъ реальными числами такъ, чтобы въ своемъ новомъ соозначеніи эти термины могли быть относимы какъ къ раціональнымъ, такъ и къ ирраціональнымъ числамъ и чтобы, примѣняя къ раціональнымъ числамъ дѣйствія на основаніи новаго ихъ опредѣленія, мы всегда получали прежніе результаты. Пусть γ будетъ результатъ совершенія нѣкотораго дѣйствія O надъ двумя произвольными раціональными числами α и β. Если найдемъ правило K, по которому, зная сѣченія, производимыя числами α и β, мы всегда въ состояніи найти сѣченіе, производимое числомъ γ, то дѣйствіе O можно будетъ опредѣлить какъ процессъ составленія нѣкотораго сѣченія по правилу K изъ сѣченій, производимыхъ числами α и β. Такое опредѣленіе дѣйствія O, имѣя смыслъ и въ томъ случаѣ, когда одно изъ чиселъ α и β или оба ирраціональны, обладаетъ свойствомъ перманентности. Процессъ отысканія новыхъ перманентныхъ опредѣленій дѣйствій при переходѣ отъ раціональныхъ чиселъ ко всѣмъ реальнымъ авторъ называетъ приведеніемъ вычисленій съ реальными числами къ вычисленіямъ съ раціональными числами. (*Примѣч. переводчика*).

очевидно образуетъ сѣченіе, ибо всякое число c_1 въ C_1 меньше каждаго числа c_2 въ C_2. Если теперь оба числа α, β раціональны, то каждое содержащееся въ C_1 число $c_1 \leqq \alpha + \beta$, ибо $a_1 \leqq \alpha$; $b_1 \leqq \beta$, а потому и $a_1 + b_1 \leqq \alpha + \beta$. Если бы далѣе въ C_2 содержалось какое либо число $c_2 < \alpha + \beta$, такъ что было бы $\alpha + \beta = c_2 + p$, гдѣ p означаетъ положительное число, то имѣли бы

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

а это находится въ противорѣчіи съ опредѣленіемъ числа c_2, такъ какъ $\alpha - \frac{1}{2}p$ есть число изъ A_1, а $\beta - \frac{1}{2}p$ есть число изъ B_1. Такимъ образомъ каждое содержащееся въ C_2 число $c_2 \geqq \alpha + \beta$; слѣдовательно, сѣченіе (C_1, C_2) образуется въ этомъ случаѣ суммой $\alpha + \beta$. Мы поэтому не погрѣшимъ противъ опредѣленія, которое имѣетъ мѣсто въ ариѳметикѣ раціональныхъ чиселъ, если во всѣхъ случаяхъ будемъ разумѣть подъ *суммой* $\alpha + \beta$ двухъ произвольныхъ дѣйствительныхъ чиселъ α, β то число γ, посредствомъ котораго образуется сѣченіе (C_1, C_2).*) Далѣе, если только одно изъ двухъ чиселъ α, β, напр. α, раціонально, то легко убѣдиться, что на сумму $\gamma = \alpha + \beta$ не вліяетъ то обстоятельство, отнесемъ ли мы α къ первому классу A_1 или ко второму A_2,

Такъ же, какъ сложеніе, можно опредѣлить и остальныя операціи такъ называемой элементарной ариѳметики, а именно составленіе разности, произведенія, степени, корня, логариѳма. Такимъ образомъ можно придти къ дѣйствительному доказательству теоремъ (какъ напр. $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$), которыя, сколько я знаю, до сихъ поръ нигдѣ не доказаны. Слишкомъ большія подробности, которыхъ слѣдуетъ опасаться при опредѣленіи болѣе сложныхъ операцій, лежатъ частью въ природѣ самого предмета, большею же частью онѣ могутъ быть устранены. Въ этомъ отношеніи является весьма полезнымъ понятіе объ *интервалѣ*, т. е. о системѣ A раціональныхъ чиселъ, обладающихъ слѣдующимъ характернымъ свойствомъ: если a и a' суть числа системы A, то всѣ раціональныя числа, лежащія между a и a', содержатся въ A. Система R раціональныхъ чиселъ, а также и оба класса каждаго ея сѣченія суть интервалы. Если существуетъ раціональное число a_1, которое меньше каждаго числа интервала A, и есть раціональное число a_2, которое больше каждаго числа интервала A, то A называется конечнымъ интерваломъ; въ этомъ случаѣ существуетъ очевидно безконечное множество чиселъ того же рода, что и a_1, и безконечное множество чиселъ тако-

---

*) Изъ сѣченій $(A_1 A_2)$ и $(B_1 B_2)$ по указанному только что способу.
(*Примѣч. переводчика*).

го же рода, какъ a_2. Вся область R распадается на три куска, A_1, A, A_2, причемъ появляются два вполнѣ опредѣленныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа α_1, α_2, которыя соотвѣтственно могутъ быть названы нижней и верхней (или меньшей и большей) *границей* интервала A. Нижняя граница α_1 опредѣляется сѣченіемъ, въ которомъ первый классъ образованъ системой A_1; верхняя же граница α_2 опредѣляется сѣченіемъ, въ которомъ A_2 образуетъ второй классъ. О всякомъ раціональномъ или ирраціональномъ числѣ α, лежащемъ между α_1 и α_2, будемъ говорить, что оно лежитъ *внутри* интервала A. Когда всѣ числа интервала A являются также числами интервала B, то A будетъ называться кускомъ B.

Еще большія отступленія будутъ повидиму предстоять, когда захотятъ перенести безчисленныя предложенія ариѳметики раціональныхъ чиселъ (напр. предложеніе $(a+b)c=ac+bc$) на произвольныя реальныя числа. Это однако не такъ: скоро убѣждаешься, что все здѣсь приводится къ доказательству положенія, по которому ариѳметическія операціи сами обладаютъ нѣкоторой непрерывностью. То, что я подъ этимъ понимаю, я облеку въ форму общей теоремы.

„Если число λ есть результатъ вычисленій, совершенныхъ съ числами α, β, γ,....., и если λ лежитъ внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которыхъ лежатъ числа α, β, γ,....) такого рода, что результатъ такого же вычисленія, въ которомъ однако числа α, β, γ,... замѣнены любыми числами интерваловъ A, B, C,..., будетъ всегда представлять число, лежащее внутри интервала L". Однако же ужасная трудность, связанная со словеснымъ изложеніемъ такой теоремы, убѣждаетъ насъ въ томъ, что здѣсь необходимо что нибудь предпринять для того, чтобы придти въ помощь языку: этого мы дѣйствительно достигаемъ самымъ совершеннымъ образомъ, когда вводимъ понятіе *о перемѣнныхъ величинахъ, о функціяхъ, о предѣлахъ.* Всего цѣлесообразнѣе было бы основать на этихъ понятіяхъ опредѣленія даже простѣйшихъ ариѳметическихъ операцій, что здѣсь однако не можетъ быть дальше проведено.

§ 7.

Анализъ безконечныхъ.

Въ заключеніе мы уяснимъ здѣсь зависимость между приведенными до сихъ поръ соображеніями и основными положеніями анализа безконечныхъ.

Говорятъ, что перемѣнная величина x, пробѣгающая послѣдовательныя опредѣленныя численныя значенія, приближается къ постоянному *предѣлу* α, если она въ ходѣ процесса *окончательно**) заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежитъ, или, что то же, если разность $x-\alpha$, взятая абсолютно, окончательно опускается ниже всякаго даннаго значенія, отличнаго отъ нуля.

Одно изъ важнѣйшихъ предложеній гласитъ такъ: „Если величина α растетъ постоянно, но не сверхъ всякихъ границъ, то она приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Я доказываю это предложеніе слѣдующимъ образомъ: по предположенію, существуетъ одно, а, слѣдовательно, и безчисленное множество чиселъ α_2 такого рода, что x постоянно остается $<\alpha_2$. Я обозначаю черезъ $\mathfrak{A}_2$ систему всѣхъ этихъ чиселъ α_2 и черезъ $\mathfrak{A}_1$ систему всѣхъ остальныхъ чиселъ α_1; каждое изъ послѣднихъ имѣетъ то свойство, что въ продолженіе процесса измѣненія имѣемъ окончательно $x \geqslant \alpha_1$, поэтому каждое число α_1 меньше каждаго числа α_2, и, слѣдовательно, существуетъ число α, которое представляетъ собою или наибольшее въ $\mathfrak{A}_1$, или наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$ (§ 5. IV). Перваго быть не можетъ, ибо x никогда не перестаетъ расти, поэтому α есть наименьшее число въ $\mathfrak{A}_2$. Какое бы число α_1 мы ни взяли, рано или поздно будетъ окончательно $\alpha_1 < x < \alpha$, т. е. x приближается къ предѣлу α.

Это предложеніе эквивалентно принципу непрерывности, т. е. оно теряетъ свою силу, какъ только мы станемъ смотрѣть хоть на одно реальное число, какъ на число, отсутствующее въ области $\mathfrak{R}$; или, выражаясь иначе, если это предложеніе вѣрно, то вѣрна и теорема IV въ § 5.

Другое предложеніе, также ему эквивалентное, но еще болѣе часто встрѣчающееся въ анализѣ безконечныхъ, гласитъ такъ: „Если въ процессѣ измѣненія величины x можно указать для каждой положительной величины δ соотвѣтствующій моментъ, начиная съ котораго x измѣняется меньше чѣмъ на δ, то x приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Это обращеніе легко доказуемой теоремы, по которой перемѣнная величина, приближающаяся къ опредѣленному предѣлу, измѣняется въ концѣ концовъ меньше, чѣмъ на любую данную положительную величину, можетъ быть выведено какъ изъ предыдущаго предложенія, такъ и непосредственно изъ принципа непрерывности. Мы выберемъ послѣдній путь. Пусть δ будетъ произвольная положительная величина (т. е.

---

*) Авторъ употребляетъ слово „definitiv"=„рѣшительно, окончательно" въ томъ смыслѣ, что, пріобрѣвъ какое либо свойство въ опредѣленный моментъ своего измѣненія, перемѣнная величина удерживаетъ это свойство, въ продолженіе всего остальнаго хода процесса. (*Примѣч. переводчика*).

$\delta>0$); по предположенію, наступаетъ моментъ, съ котораго x начинаетъ измѣняться меньше, чѣмъ на δ, т. е., если въ этотъ моментъ x обладаетъ значеніемъ a, то впослѣдствіи всегда $x>a-\delta$ и $x<a+\delta$. Я оставляю на время первоначальную гипотезу и держусь только сейчасъ доказаннаго факта, что всѣ позднѣйшія значенія перемѣнной x лежатъ между конечными значеніями, которыя могутъ быть даны. На этомъ я основываю двойное подраздѣленіе всѣхъ реальныхъ чиселъ. Къ системѣ $\mathfrak{A}_2$ я отношу всякое число α_2 (напр. $a+\delta$), обладающее тѣмъ свойствомъ, что въ ходѣ процесса x окончательно становится $\leqq\alpha_2$; къ системѣ $\mathfrak{A}_1$ я отношу всякое число, не содержащееся въ $\mathfrak{A}_2$. Если α_1 есть такое число, то, какъ бы далеко процессъ ни продолжался, случай $x>\alpha_1$ будетъ еще наступать безчисленное множество разъ*). Такъ какъ каждое число α_1 меньше каждаго числа α_2**), то существуетъ вполнѣ опредѣленное число α, которымъ производится это сѣченіе $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ системы $\mathfrak{R}$ и которое я буду называть верхнимъ предѣломъ перемѣнной величины x, остающейся всегда конечною. Но характеромъ измѣненій перемѣнной x порождается также другое сѣченіе $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ системы $\mathfrak{R}$: число β_1 (напр. $a-\delta$) включается въ $\mathfrak{B}_1$, если въ продолженіе процесса окончательно $x\geqq\beta_1$; всякое другое число β_2, подлежащее включенію въ $\mathfrak{B}$, имѣетъ то свойство, что x никогда окончательно не становится $\geqq\beta_2$, такъ что случай $x<\beta_2$ будетъ наступать еще безчисленное множество разъ. Число β, производящее это сѣченіе, пусть называется нижнимъ предѣломъ перемѣнной x. Оба числа α, β очевидно характеризуются слѣдующимъ свойствомъ: если ε есть произвольно малая положительная величина, то всегда будетъ окончательно $x<\alpha+\varepsilon$ и $x>\beta-\varepsilon$, но никогда не будетъ окончательно $x<\alpha-\varepsilon$ и $x>\beta+\varepsilon$. Теперь возможны два случая. Если α и β отличны другъ отъ друга, то необходимо $\alpha>\beta$, ибо всегда $\alpha_2\geqq\beta_1$; перемѣнная величина x колеблется и, какъ бы далеко процессъ ни пошелъ, она все еще перетерпѣваетъ измѣненія, значенія которыхъ превосходятъ $(\alpha-\beta)-2\varepsilon$, гдѣ ε означаетъ произвольно малую положительную величину. Первоначальная гипотеза, къ которой я теперь только возвращаюсь, находится въ противорѣчіи съ этимъ выводомъ; остается поэтому только второй случай $\alpha=\beta$, и, такъ какъ уже доказано, что, какъ-бы мала ни была положительная величина ε, окончательно будетъ всегда

*) Ибо противное означало бы, что неравенство $x\leqq\alpha_1$ справедливо *окончательно*, т. е. α_1 принадлежало бы къ классу $\mathfrak{A}_2$. *(Прим. перев.)*.

**) Потому что послѣ того, какъ величина x *окончательно* стала $<\alpha_2$, она еще больше или еще сдѣлается больше, чѣмъ α_1. *(Прим. перев.)*.

$x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$, то x приближается къ предѣлу α, что и требовалось доказать.

Удовольствуемся этими примѣрами въ изложенiи связи между принципомъ непрерывности и анализомъ безконечныхъ.